Wohlordnungen

Erinnerung: Eine *Wohlordnung* auf einer Menge X ist eine Totalordnung, für die jede nichtleere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt.

Satz: *(Induktion über eine Wohlordnung)* Für jede wohlgeordnete Menge X und jedes einstellige Prädikat P gilt

$$\Big[\forall x \in X\colon\ \ (\forall y \in X_{<x}\colon P(y)) \longrightarrow P(x)\Big] \longrightarrow \Big[\forall x \in X\colon\ \ P(x)\Big].$$

Rekursionstheorem: Für jede wohlgeordnete Menge X und jede zweistellige Klassenfunktion F existiert eine eindeutige Funktion f mit Definitionsbereich X, so dass gilt:

$$\forall x \in X\colon f(x) = F(x, f|X_{<x}).$$

Bemerkung: Eigenschaften der so konstruierten Funktion beweist man durch Induktion über die Wohlordnung: Sei zum Beispiel $P(x)$ ein Prädikat (eventuell mit Parametern) mit der Eigenschaft

$$\forall x \in X\, \forall g \text{ Funktion auf } X_{<x}\colon \big(\forall y \in X_{<x}\colon P(g(y))\big) \longrightarrow P(F(x,g)).$$

Mit Induktion folgt dann $\forall x \in X\colon P(f(x))$.

Beispiel: Sei Z eine Menge, so dass für jedes $x \in X$ und jede Funktion g mit $\mathrm{Bild}(g) \subseteq Y$ gilt $\mathrm{Bild}(F(x,g)) \subseteq Y$. Dann gilt $\mathrm{Bild}(f) \subseteq Z$.

Beweis des Rekursionstheorems: (Vgl. [Ebbinghaus Kap.VII Satz 1.2.)

Wir nennen eine Menge g einen *Anfang*, falls gilt:

$$(*) \qquad \left[\begin{array}{l} g \text{ ist eine Funktion (also ihr Graph) und} \\ \mathrm{Def}(g) \text{ ist ein Anfangssegment von } X \text{ und} \\ \forall x \in \mathrm{Def}(g)\colon\ g(x) = F(x, g|X_{<x}). \end{array}\right]$$

Diese Bedingung lässt sich durch ein einstelliges Prädikat $\psi(g)$ ausdrücken.

Behauptung 1: Je zwei Anfänge g und g' stimmen auf $\mathrm{Def}(g) \cap \mathrm{Def}(g')$ überein.

Behauptung 2: Die Menge $Y := \bigcup_{g \text{ Anfang}} \mathrm{Def}(g)$ ist ein Anfangssegment von X.

Behauptung 3: Das zweistellige Prädikat

$$\omega(x,z) \;:=\; \left[\begin{array}{l} \exists g \text{ Anfang mit } x \in \mathrm{Def}(g) \text{ und } g(x) = z \\ \text{oder } (x \notin Y \text{ und } z = \varnothing) \end{array}\right]$$

definiert eine Klassenfunktion.

Nach dem Ersetzungsaxiom definiert ω nun eine Funktion f mit $\mathrm{Def}(f) = Y$.

Behauptung 4: f ist ein Anfang.

Behauptung 5: $Y = X$.

Wegen Behauptung 4 und 5 hat die Funktion f die gesuchte Eigenschaft.

Eindeutigkeit:

$\square$

Die natürlichen Zahlen

Referenz: Ebbinghaus, Einführung in die Mengenlehre, Kap. V, §1-2

Definition: Wir setzen $0 := \varnothing$ und $Sx := x \cup \{x\}$.

Erinnerung: • Eine Menge I heisst *induktiv*, wenn gilt $\forall x \in I\colon Sx \in I$.

- Das Unendlichkeitsaxiom besagt: Es existiert eine induktive Menge I mit $0 \in I$.
- Es existiert eine eindeutige kleinste induktive Menge ω mit $0 \in \omega$.

Proposition:

(a) $\neg\exists x \in \omega\colon Sx = 0$.

(b) $\forall x \in \omega\colon x \notin x$.

(c) $\omega = \{0\} \cup \{Sx \mid x \in \omega\}$.

(d) Für jede Formel φ mit freier Variable x (und eventuell mit weiteren Parametern) gilt

$$\varphi(0) \wedge \big(\forall x \in \omega\colon (\varphi(x) \longrightarrow \varphi(Sx))\big) \longrightarrow \big(\forall x \in \omega\colon \varphi(x)\big).$$

Proposition:

(e) $\forall x \in \omega \; \forall y \in x \colon y \in \omega \wedge y \subseteq x$.

(f) $\forall x \in \omega \colon x \subseteq \omega$.

(g) $\forall x, y \in \omega \colon Sx = Sy \longrightarrow x = y$.

Peano-Axiome: Die Signatur besteht aus einem Konstantensymbol 0 und einem einstelligen Funktionssymbol S. Die Axiome sind:

PA$_1$: $\neg\exists x\colon Sx = 0.$

PA$_2$: $\forall x, y\colon (Sx = Sy \longrightarrow x = y).$

PA$_3$: Für jede Formel φ mit freier Variable x (und eventuell mit weiteren Parametern) gilt

$$\varphi(0) \wedge \big(\forall x\colon (\varphi(x) \longrightarrow \varphi(Sx))\big) \longrightarrow \big(\forall x\colon \varphi(x)\big).$$

Satz: ZF $\vdash (\omega, 0, S)$ ist ein Modell von PA.

Proposition:

(h) $\forall x \in \omega\colon x = 0 \vee 0 \in x$.

(i) $\forall x \in \omega\ \forall y \in x\colon Sy \in Sx$.

(j) $\forall x, y \in \omega\colon x \in y \vee x = y \vee y \in x$.

Satz: Die Relation $\in$ induziert eine strikte Wohlordnung auf ω.

Proposition: Mit $1 := S0$ existieren eindeutige zweistellige Verknüpfungen

$$\omega \times \omega \to \omega, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} x + y \\ x \cdot y = xy \\ x^y \end{cases}$$

so dass für alle $x, y \in \omega$ gilt

$x + 0 \;=\; x$	$x + Sy \;=\; S(x+y)$
$x \cdot 0 \;=\; 0$	$x \cdot Sy \;=\; x \cdot y + x$
$x^0 \;=\; 1$	$x^{Sy} \;=\; x^y \cdot x$

Bemerkung: Diese Rechenoperationen sind damit zwar von aussen eingeführt, die Relation $x + y = z$ beziehungsweise $xy = z$ lässt sich aber nicht durch eine Formel alleine mit der Signatur $(0, S)$ ausdrücken. Darum erweitert man in der mathematischen Logik die Signatur zu $(0, S, +, \cdot)$ und fügt die obigen vier Eigenschaften von $+$ und $\cdot$ zu den Peano-Axiomen hinzu.

Diese Verknüpfungen besitzen die folgenden Grundeigenschaften:

Proposition: Für alle $x, y, z \in \omega$ gilt:

$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
$0 + x = x$	$1 \cdot x = x$
$0 \neq 1$	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

$x^{y+z} = x^y \cdot x^z$	$x^0 = 1$
$(xy)^z = x^z \cdot y^z$	$x^1 = x$
$x^{yz} = (x^y)^z$	$1^x = 1$